

$AG_n(K)$

coordinate

$(x_1 \dots x_n) \in K^n$

$\mathbb{P}^n K$

coordinate $[(x_1 \dots x_n \ x_{n+1})]$

$P \equiv (x_1 \dots x_n)$

$[(x_1 \dots x_n \ 1)]$

oltre ai punti di $AG_n(K)$
abbiamo anche tutti i
punti impropri = direzioni della
retta di $AG_n(K)$.

Σ sottospazio affine

di eq.

$$AX = B$$



sottospazio proiettivo

di eq.

$$AX - x_{n+1}B = \underline{0}$$

di dim k .

(sono sp. vettoriali di dim $= k+1$)

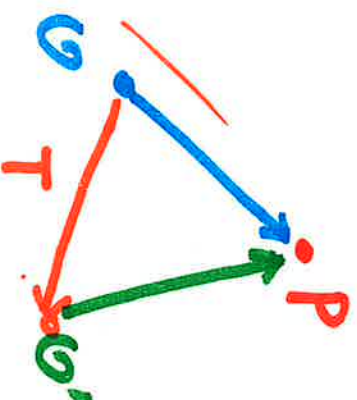
In $AG_n(k)$ le coordinate
sono date da un rif. affine.

$$\Pi = (O, \mathcal{B}) \quad O \in A$$

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$$

$$\Pi' = (O', \mathcal{B}')$$

$$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$$



$$E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$$E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$$

$$E' = AE$$

$$\vec{O'P} = {}^T E' X' = (AE) X$$

$$\vec{OP} = O\vec{O} + \vec{O'P} = -{}^T E T + {}^T E X$$

$${}^T (AE) X' = {}^T E (X - T)$$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

$${}^T E T = O\vec{O'}$$

X coord. di P
rispetto Π

X' coord. di P
rispetto Π'

T coord. di O'
rispetto a Π

A : matrice di
camb. di base

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

$${}^T E {}^T A X' = {}^T E (X - T) \Rightarrow$$

$$X = {}^T A X' + T$$

$$X' = {}^T A^{-1} (X - T)$$

In $AG_n(1k)$ una trasformazione affine è una trasformazione tale che $y = AX + T$ con $\det A \neq 0$

oss: una trasformazione affine manda rette in rette, punti in punti e preserva l'incidenza.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} \\ \frac{y+2}{2} \end{pmatrix}$$



Def: Siano $A, B \in AG_n(1k)$.

Si dice punto medio fra A e B il punto M tale che $\vec{AM} = \vec{MB}$

In particolare se $\vec{AM} = \vec{MB} \Rightarrow \vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$
nell'ipotesi $2 \neq 0 \quad 2\vec{AM} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$$M = A + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

In coordinate $A = (x_1' \dots x_n')$ $B = (x_1'' \dots x_n'') \Rightarrow$

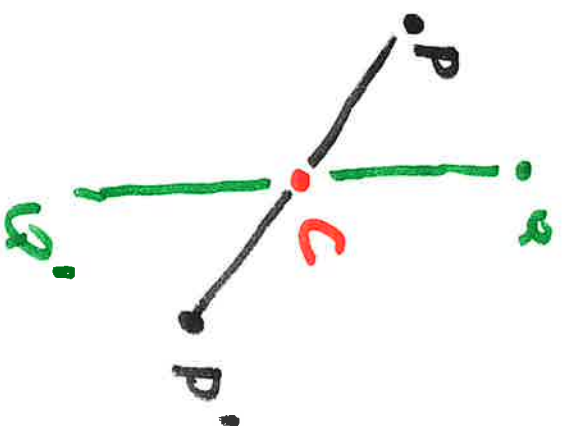
$$\Rightarrow \vec{AB} = (x_1'' - x_1' \dots x_n'' - x_n')$$

$$\Rightarrow A + \frac{1}{2}\vec{AB} = \left(\frac{x_1' + x_1''}{2} \dots \frac{x_n' + x_n''}{2} \right).$$

Def: Sia $C \in AG_n(1k) \Rightarrow$ si dice simmetria centrale di centro C

la funzione che manda ogni $P \in AG_n(1k)$ in un punto $P' \in AG_n(1k)$ tale che C sia il punto medio

fra P e P'



Supponiamo $C = (c_1 \dots c_n)$ e $P = (x_1 \dots x_n)$

$$\Rightarrow P' = P + 2\vec{PC} \Rightarrow P' = (x_1 \dots x_n) + 2(c_1 - x_1 \dots c_n - x_n)$$

$$= (\underline{2c_1 - x_1} \dots \underline{2c_n - x_n})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} -I & \begin{smallmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$X' = -IX + 2C$$

$$6_c(6_c(X)) = 6_c(-IX + 2C) = IX - 2C + 2C = X$$

CAMBIAMENTO DI BASE ^{RIFER.} AFFINE.

$$X' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}}{A} X + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore}}}{T}$$

In $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ i punti sono rapp. da sottospazi 1-dim.

In generale se cambiamo base otteniamo delle altre coordinate associate per i punti.

Un cambiamento di riferimento corrisponde ad una matrice di cambiamento di base.

→ In generale non è detto che un camb. di base in $\mathbb{K}^n$ corrisponda ad un cambiamento di rif. di $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ che manda punti propri in punti propri!

I cammini di rif. (di base) in $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ che
 mandano i punti sfiniti in se stessi sono quelli
 che anche finiscono a l'infinito $x_{n+1}=0$ dei
 punti impropri.

$n=2$
 vogliamo una matrice $A \in \mathbb{K}^{3,3}$ invertibile
 tale che il sottospazio $x_3=0$ sia mandato in se stesso.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_{x_1, x_2} \in \mathbb{K}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0 \quad \forall x_1, x_2 \Rightarrow a_{31}=0$$

$$a_{32}=0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{33} \neq 0$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

In coord. affine

$$(\overset{x}{y}) \rightarrow a_{11}x + a_{12}y$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a_{33}}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{a_{33}} (A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix})$$

↑
generica trasformazione
affine.

N.B.: matrici proporzionali danno la medesima trasformazione proiettiva.

In particolare per proiettivi da
molti punti propri in pochi propri
possiamo supporre che l'ultima
riga sia $(0\ 0\ \dots\ 0\ 1)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & t_1 \\ c & d & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + t_1 \\ cx + dy + t_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b=0$
 $c=0$
 $a=d$

$A_{x,y}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & a & t_1 \\ 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Geometria Euclidea = Geometria affine
su $\mathbb{R}^n$

$+$
prod. scalare
definito positivo

$\rightarrow$ nozione di
lunghezza di
un vettore
(norma)

Euclidea.

$K = \mathbb{R}$.

consideriamo $EG_n(\mathbb{R})$ con

la geometria affine su $\mathbb{R}$ in cui

si introduce anche la nozione di

distanza $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ data come

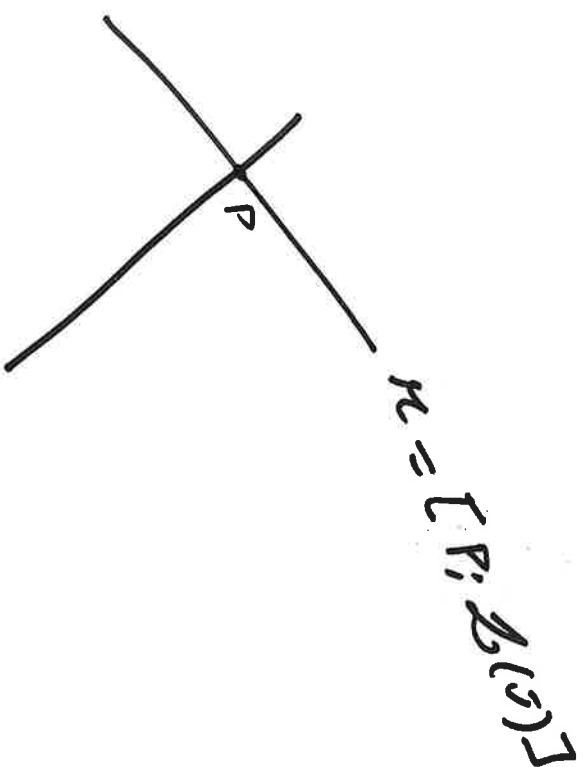
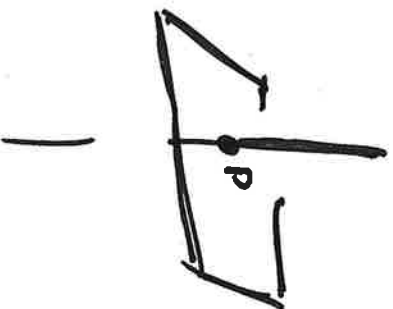
$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\|$$

con $\|\vec{PQ}\| = \vec{PQ} \cdot \vec{PQ}$ e " $\cdot$ " prod. scalare su $\mathbb{R}^n$ def.
positivo.

$\downarrow$
distanza euclidea.
fra punti.

Def. In $EG_n(\mathbb{R})$ siano $\pi = [P; \mathcal{U}]$ e $\Sigma = [Q; \mathcal{W}]$ due sottospazi affini. Si dice che $\pi \perp \Sigma$ (π ortogonale a Σ) se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}^\perp$ oppure $\mathcal{U}^\perp \subseteq \mathcal{W}$.
 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}^\perp$ $\mathcal{W}^\perp \subseteq \mathcal{U}$

N.B. $\pi \perp \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \perp \pi$



$$d(P, Q) \geq 0$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

$$d(P, Q) = d(Q, P)$$

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

]

La distanza euclidea
è una distanza!

→ luogo geometrico in termini di distanza

→ proiezioni ortogonali, etc.

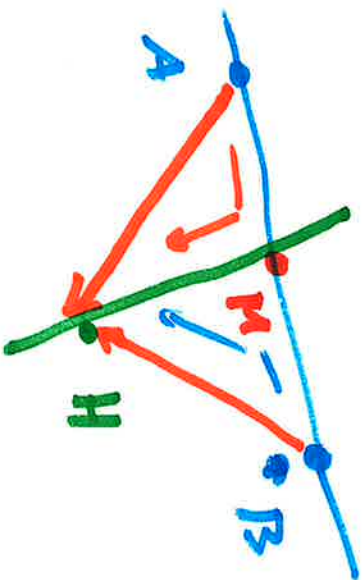
Def: Siano $A, B \in EG_2(\mathbb{R})$. con $A \neq B$.

Si dice ASSE fra A e B il luogo dei punti

equidistanti da A e da B .

Teorema: L'asse fra A e B è la retta passante per il
punto medio fra A e B ed ortogonale alla
direzione $\overrightarrow{AB}$.

DM:



1) puisque $\vec{AM} = \vec{MB}$ car M

$$\|\vec{AM}\| = \|\vec{MB}\| \text{ et}$$

puisque $M \in$ assa fra A et B

$$d(A, M) = \|\vec{AM}\| = \|\vec{MB}\| = d(M, B) = d(B, M).$$

Soit H un quelconci punto tale che

$$d(A, H) = d(H, B) \text{ cioè } \|\vec{AH}\|^2 = \|\vec{BH}\|^2$$

$$\|\vec{AH}\|^2 = \vec{AH} \cdot \vec{AH} = (\vec{AM} + \vec{MH}) \cdot (\vec{AM} + \vec{MH}) =$$

$$= \vec{AM} \cdot \vec{AM} + \vec{MH} \cdot \vec{AM} + \vec{AM} \cdot \vec{MH} + \vec{MH} \cdot \vec{MH} = \|\vec{AM}\|^2 + 2 \vec{AM} \cdot \vec{MH} + \|\vec{MH}\|^2.$$

$$\|\vec{BH}\|^2 = \vec{BH} \cdot \vec{BH} = \|\vec{BM}\|^2 + 2 \vec{BM} \cdot \vec{MH} + \|\vec{MH}\|^2$$

$$0 = \|\vec{A}\vec{H}\|^2 - \|\vec{B}\vec{H}\|^2 = 2(\vec{A}\vec{M} \cdot \vec{M}\vec{H} - \vec{B}\vec{M} \cdot \vec{M}\vec{H}) =$$

$$= 4 \vec{A}\vec{M} \cdot \vec{M}\vec{H} \quad \vec{B}\vec{M} = -\vec{A}\vec{M}$$

$$\Rightarrow \|\vec{A}\vec{H}\| = \|\vec{B}\vec{H}\| \Leftrightarrow \vec{A}\vec{M} \cdot \vec{M}\vec{H} = 0 \Leftrightarrow H \in [M; \mathcal{L}(\vec{M}\vec{H})]$$

con cui $\vec{M}\vec{H} \in \vec{A}\vec{M}^\perp = \vec{A}\vec{B}^\perp$ $\square$

N.B.: La medesima dimostrazione vale anche per $n \geq 2$
 Nell'ultimo passaggio si ottiene $\vec{M}\vec{H} \in \vec{A}\vec{B}^\perp$

Se $n \geq 2 \Rightarrow$ lo spazio $[H; \vec{A}\vec{B}^\perp]$ è un iperspazio.
 in questo dim $\vec{A}\vec{B}^\perp = n-1$.

Proiezione ortogonale

Siano $P \in EG_n(\mathbb{R})$ e Π un sottospazio affine.

Qual'è il punto di Π più vicino a P ?

oss: Sia $\Pi = [Q; W]$ un sottospazio.

Si dice sottospazio ortogonale a Π per un punto P il sottospazio $\Sigma = [P; W^\perp]$

$$\dim \Pi = k = \dim W \Rightarrow \dim \Sigma = \dim W^\perp = n - k$$

Σ è il più grande sottospazio ortogonale a Π passante per P .

Infatti $\Sigma \perp \Pi \Rightarrow$ il sottospazio di traslazione

di Π e quello di Σ devono essere in somma diretta $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim \Sigma \leq n - \dim \Pi.$$

• $\Sigma \cap \Pi \neq \emptyset \rightarrow$ oss. che in $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$

$\exists \Sigma$ corrisponde una s.vett. di dim $n-k+1$

e Π corrisponde una s.vett. di dim $k+1$

$$\Rightarrow (n-k) + (k+1) = n+1 > n+1 \text{ e dunque}$$

$$\dim(\tilde{\Sigma} \cap \tilde{\Pi}) \geq 1 \Rightarrow \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\Pi} \text{ contiene almeno}$$

un punto.

oss 2: $\Sigma \cap \Pi$ coincide di solito con un punto

Proprio. Infatti se $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{\Pi}$ fosse un punto

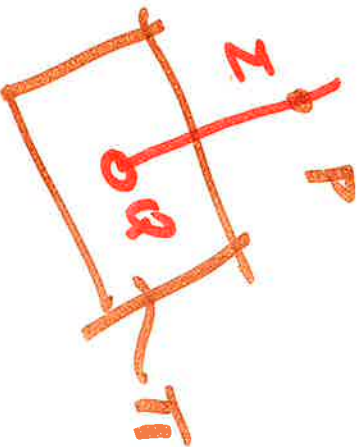
improprio $\Rightarrow$ ci sarebbe una dir. comune in

$$W \text{ e } W^\perp \Rightarrow W \cap W^\perp \neq \emptyset \text{ assurdo in quanto}$$

non ci sono vettori $\vec{w} \in W$ tali che $\vec{w} \neq 0$ e

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = 0.$$

$\Rightarrow$ tutti i punti di $\sum_{i=1}^n \vec{v}_i$ sono propri:
e questo è un no th. affine privo di pt.
all'infinito $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{v}_i$ deve essere un solo
punto (non può contenere vett.).



Teorema: Dato $\Pi = [Q; W]$ e P punto $\exists!$ punto Q
tale che $Q = \Pi \cap [P; W^\perp]$.

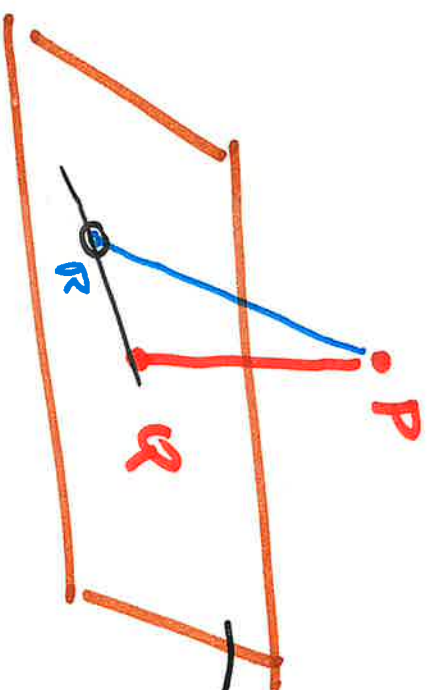
$\rightarrow$ Il punto Q è detto proiezione ortogonale di P su Π .

Teorems:

La proiection orthogonale Q de P sur Π è il punto di Π più vicino a P .

$$\forall R \in \Pi : d(R, P) \geq d(Q, P) \quad \text{e} \quad d(R, P) = d(Q, P)$$

$$\Leftrightarrow R = Q.$$



$$\Pi = L(P; w)$$

$$\vec{PQ} \perp w \quad \vec{QR} \in w$$

$$\|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{PQ} + \vec{QR}\|^2 = (\vec{PQ} + \vec{QR}) \cdot (\vec{PQ} + \vec{QR}) =$$

$$= \|\vec{PQ}\|^2 + 2 \vec{PQ} \cdot \vec{QR} + \|\vec{QR}\|^2 =$$

$$= \|\vec{PQ}\|^2 + \|\vec{QR}\|^2$$

ed è minimo

$$\Leftrightarrow \|\vec{QR}\| = 0 \Rightarrow Q = R$$

□

oss: Un sottospazio euclideo è un sottospazio affine
→ ogni riferimento affine fornisce coordinate
in $E_{G_n}(\mathbb{R})$. Rispetto tale riferimento si deve
scrivere la matrice del prod. scalare. " " "
e tale matrice sarà reale e simmetrica.

Scegliamo come riferimenti euclideo quelli
della forma $\Pi = (O, O_3)$ ove $O_3 = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$
è una base ortonormale per " " prodotto
scalare. → rispetto un riferimento euclideo la
matrice di " " è I .

oss: Se $\pi = (O, \mathcal{B})$ e $\pi' = (O', \mathcal{B}')$ sono 2 riferimenti euclidei $\Rightarrow$ la formula che trasforma da coord. di π in coord. in π' avrà del tipo $X' = AX + T$ con A matrice ortogonale.

N.B. Una trasformazione del tipo

$$X' = AX + T$$

è detta isometria in quanto preserva le distanze (e anche i prodotti scalari).

Sia Γ un riferimento euclideo.

$$\Rightarrow P = (x'_1 \dots x'_n) \quad e \quad Q = (x''_1 \dots x''_n)$$

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \left(\vec{PQ} \cdot \vec{PQ} \right)^{\frac{1}{2}} = \left((x''_1 - x'_1)^2 + \dots + (x''_n - x'_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Caso particolare $n=2$

$$P = (x_P, y_P) \quad Q = (x_Q, y_Q)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{1} \sqrt{(Q - P) \cdot (Q - P)}^{\frac{1}{2}}$$

$$Q' = A Q + T$$

$$\text{con } T A = A^{-1} \Rightarrow d(P', Q')^2 = (Q' - P') \cdot (Q' - P') =$$

$$P' = A P + T = (A Q + T - A P - T) \cdot (A Q + T - A P - T) =$$

$${}^T A = A^{-1}$$

$$= {}^T (A(Q-P)) (A(Q-P)) =$$

$$= {}^T (Q-P) {}^T A A (Q-P) = {}^T (Q-P) (Q-P) =$$

$$= d(P, Q).$$

$n=2 \Rightarrow$ una matrice A ortogonale è del tipo 2×2

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1$$

$$a, b \in \mathbb{R}.$$

$$a = \cos \vartheta$$

$$b = \pm \sin \vartheta$$

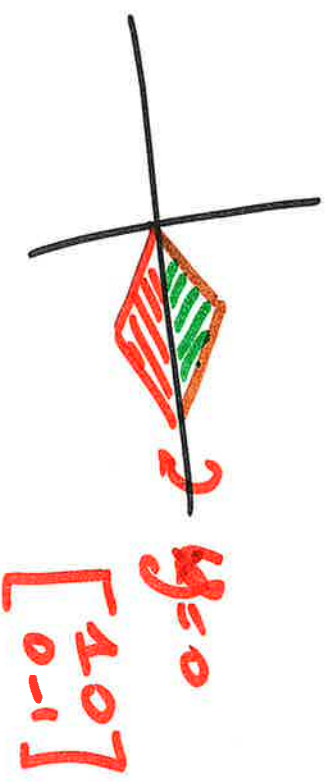
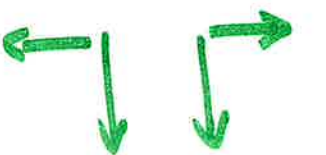
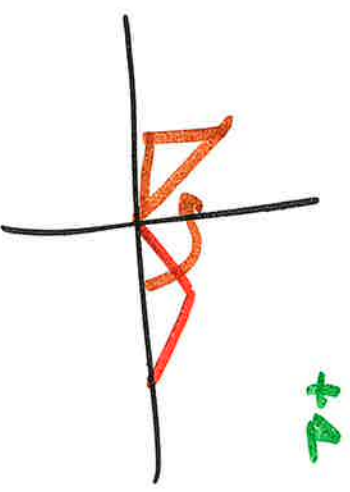
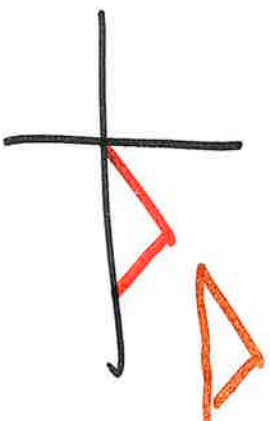
$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\text{oppure } \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Le isometrie di $EG_2(\mathbb{R})$ sono composte di

- 1) TRASLAZIONI
- 2) ROTAZIONI
- 3) RIFLESSIONE DI ASSE $y=0$
ORIGINARIA.



m2

Sia $\pi: ax+by+c=0$ l'eq. di una retta.

$\Rightarrow$ lo spazio di traslazione corrisponde alle soluzioni di $ax+by=0$

sicché si vettori $(\ell, m) \in (a, b)^\perp$

poiché siamo in dim $= 2 \Rightarrow (\ell, m)^\perp \ni (a, b)$

$$(\ell, m)^{\perp\perp} = (a, b)$$

$\bar{n} = (a, b)$ è la direzione ortogonale alla retta π



$n=3$: Sia $\pi: ax+by+cz+d=0$

giacitura di π : $ax+by+cz=0 \Rightarrow$

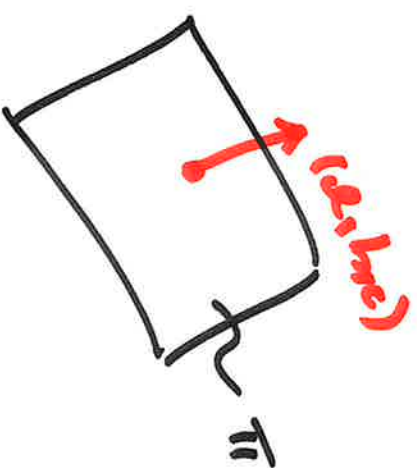
$\Rightarrow$ sotto spazio di $\mathbb{R}^3$ ottenuto come

$$W = (a, b, c)^\perp$$

quando una retta è ortogonale a $\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ la sua direzione è contenuta in W

$$W^\perp = W^\perp = (a, b, c)^\perp = L((a, b, c)).$$



$\vec{n} = (a, b, c)$ è detto
vettore normale a π .

In generale, dato un iperpiano Π di eq. $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$

il vettore $(a_2 \dots a_n) = \bar{n}$ è detto normale all'iperpiano ed identifica la direzione ortogonale al sottospazio di traslazione di π .

Def: Sia $P \in E_n(\mathbb{R})$ e π un sottospazio

Si dice distanza di P da π

$$d(P; \pi) := \min \{ d(P, R) \mid R \in \pi \}.$$

$$d(P; \pi) = 0 \Leftrightarrow P \in \pi$$

per quanto visto prima $d(P, \pi) = d(P, H)$ ove

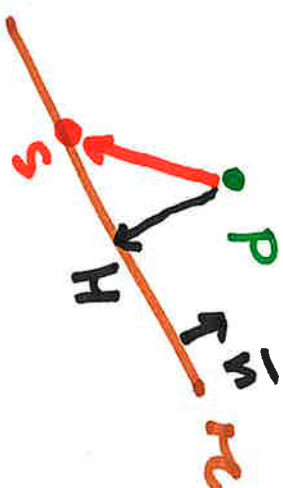
H proiezione ortogonale di P su π .

In generale per calcolare H ma se π è un iperpiano...

$n=2$

$$P = (x_P, y_P)$$

$$\pi: ax + by + c = 0$$



A noi interessa $\|\vec{PH}\|$

$\vec{PH} =$ proiezione su $\vec{n}$
del vettore $\vec{PS}$

$$\vec{PH} = \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \quad \text{A scala di } S \in \pi$$

$$S = (x_S, y_S) \in \pi \quad (x_S - x_P, y_S - y_P) = \vec{PS}$$

$$(a, b) = \vec{n}$$

$$ax_S + by_S + c = 0$$

$$\vec{PH} = \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(x_s - x_p, y_s - y_p) \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} \cdot (a, b) =$$

$$= \frac{(ax_s - ax_p + by_s - by_p)}{a^2 + b^2} (a, b) =$$

$$= \frac{(-ax_p - by_p - c)}{a^2 + b^2} (a, b).$$

$$\|\vec{PH}\| = \sqrt{\frac{(ax_p + by_p + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} \sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \square$$

$$n=3$$

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

$$\pi = ax + by + cz + d = 0$$

$$\Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

n arbitrario

$$P = (x'_1 \dots x'_n)$$

$$\pi: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|a_1 x'_1 + \dots + a_n x'_n + b|}{\sqrt{\sum_i a_i^2}}$$

#